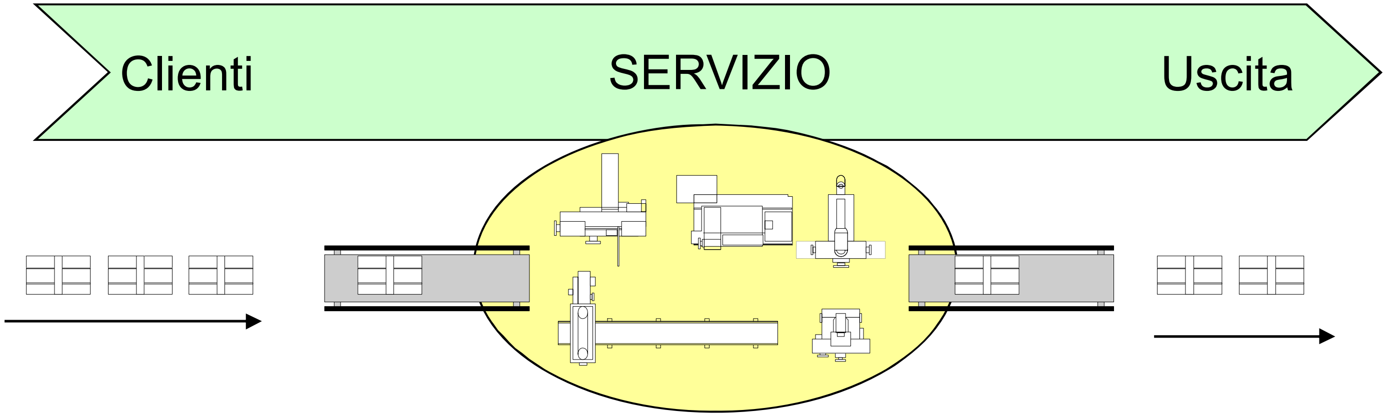
Analisi dei flussi



Quanto al massimo produce il mio sistema produttivo?

Quanto al massimo produce la mia macchina?

Teoria delle Code

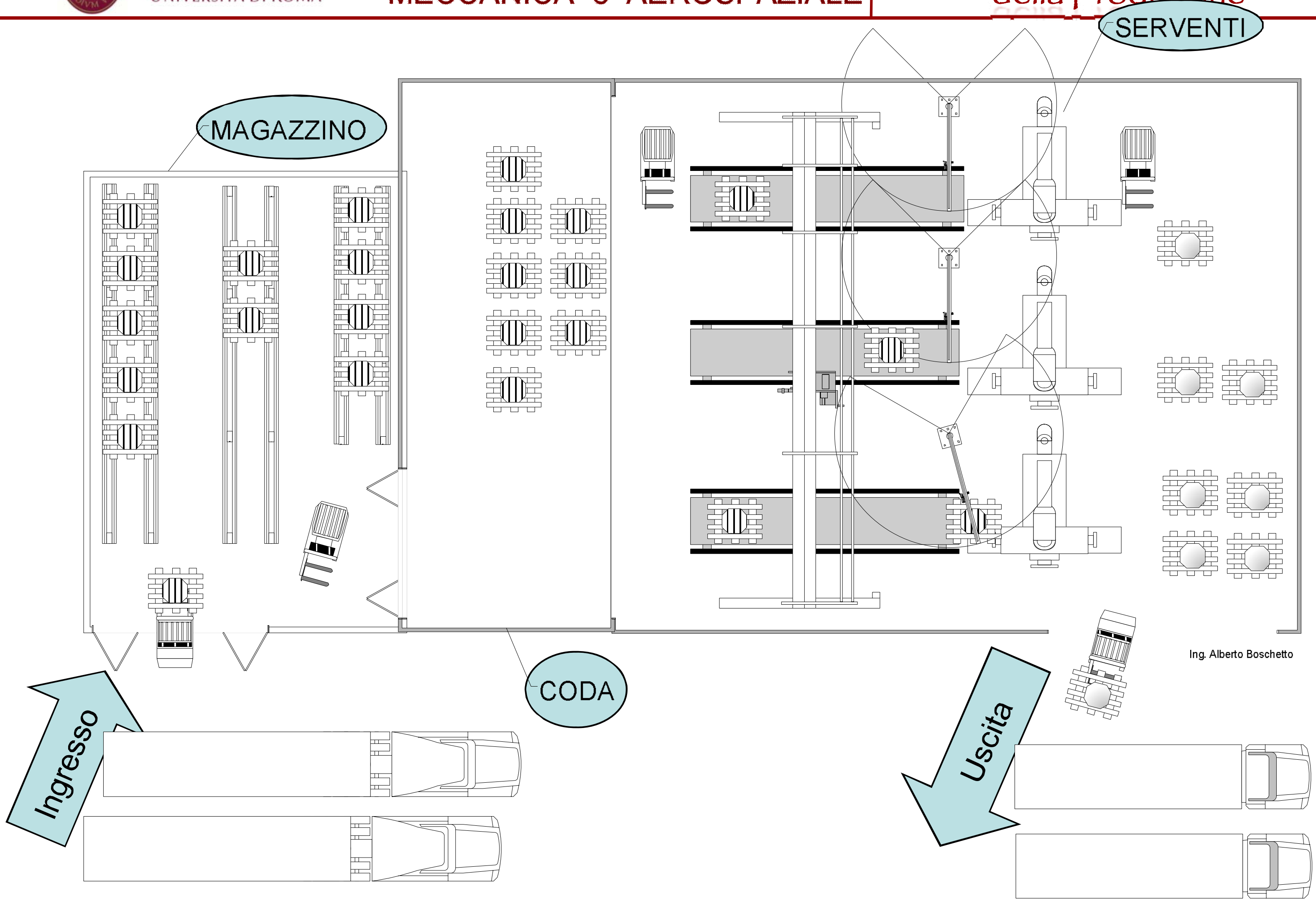
Erlang, 1917

si propone di sviluppare modelli per lo studio dei fenomeni d'attesa che si possono manifestare in presenza di una domanda di un servizio

Quando la domanda stessa e/o la capacità di erogazione del servizio sono soggetti ad **aleatorietà**, si possono infatti verificare situazioni temporanee in cui chi fornisce il servizio non ha la possibilità di soddisfare immediatamente le richieste.

Trova applicazione nel settore industriale e dei servizi

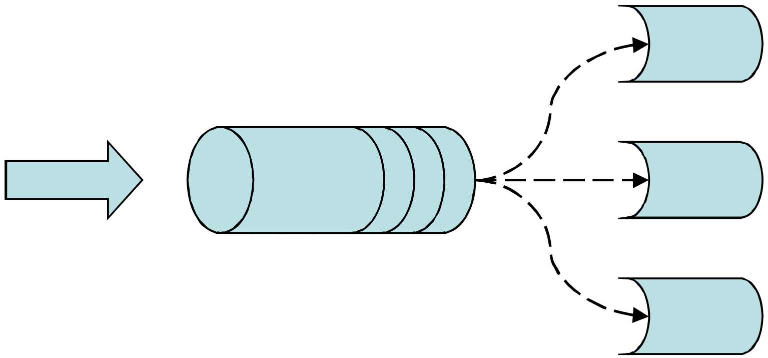
Dal punto di vista fisico un **sistema coda** è un sistema composto da un insieme non vuoto di **servitori,** capaci di fornire un servizio imprecisato, e da un insieme non vuoto di **aree di attesa** (**buffer**) capaci di accogliere i **clienti** che non possono essere serviti immediatamente.
I clienti che non trovano un servitore libero al loro arrivo si dispongono in modo ordinato, cioè in **coda,** e vengono serviti in accordo a determinate **discipline di servizio.**
Dal punto di vista dinamico una coda è costituita essenzialmente da due processi stocastici: il **processo d'arrivo** dei clienti e il **processo di servizio.**



Analisi dei flussi

Gli elementi che permettono di definire completamente il fenomeno d'attesa sono:

- **la popolazione dei clienti**
- **il processo d'arrivo**
- **la coda (in senso stretto)**
- **i servitori**
- **il processo di servizio**
- **la disciplina di servizio.**



− la popolazione dei clienti
− il processo d'arrivo
− la coda (in senso stretto)
− i servitori
− il processo di servizio
− la disciplina di servizio.

La **popolazione** è l'insieme da cui arrivano i clienti e a cui tornano dopo essere stati serviti.
Essa può essere finita o infinita.
In ambiente manifatturiero spesso le parti per essere lavorate devono essere poste su opportuni pallet.

Il **processo d'arrivo,** che descrive il modo secondo cui i clienti si presentano, è in generale un processo stocastico.
Esso è definito in termini della distribuzione dell'**intertempo d'arrivo**, cioè dell'intervallo di tempo che intercorre tra l'arrivo di due clienti successivi.
Per ottenere modelli analiticamente trattabili di solito si assume che sia il processo di arrivo che quello di servizio siano **stazionari**, ovvero che le loro proprietà statistiche non varino nel tempo.
Tale assunzione in certi ambiti può essere molto limitativa

- la popolazione dei clienti
- il processo d'arrivo
- la coda (in senso stretto)
- i servitori
- il processo di servizio
- la disciplina di servizio.

La **coda** (in senso stretto) è formata dai clienti presenti nel buffer in attesa di essere serviti.
La capacità del buffer può essere infinita o finita.
Nel caso in cui è finita essa limita di conseguenza la **capacità del sistema,** cioè il numero dei clienti in attesa nel buffer più quelli che correntemente sono serviti.
I clienti che arrivano dopo che sia saturata quest'ultima capacità sono respinti.

I **servitori** sono in numero noto e costante fissato a livello di progetto.
Usualmente essi hanno caratteristiche identiche, possono sempre lavorare in parallelo, viceversa non possono mai rimanere inattivi in presenza di clienti in coda.
Anche se vi sono più servitori in una coda, in generale, si assume l'esistenza di un unico buffer comune, quando infatti ogni servitore ha il suo buffer separato si preferisce pensare ad un insieme di code.
Può però essere comodo introdurre, almeno logicamente, più buffer in presenza di clienti provenienti da popolazioni diverse.

- la popolazione dei clienti
- il processo d'arrivo
- la coda (in senso stretto)
- i servitori
- il processo di servizio
- la disciplina di servizio.

Il **processo dei servizi** descrive il modo secondo cui ciascun servitore eroga il servizio.
Esso è definito in termini delle distribuzioni dei **tempi di servizio** dei diversi servitori.
Il processo dei servizi è alimentato dal processo d'arrivo.
Il processo d'arrivo è indipendente e condiziona il processo dei servizi.
Un cliente, infatti, può essere servito solo se è già arrivato.
Quando non c'è nessuno, il servitore è inattivo e quindi non può avvantaggiarsi in vista d'impegni futuri.
Non può esistere una coda negativa.

La **disciplina di servizio** specifica quale sarà il prossimo cliente servito fra quelli in attesa al momento in cui si libera un servitore.
Le discipline di servizio usualmente considerate, poiché sia molto comuni nella realtà che matematicamente trattabili, sono: servizio in ordine di arrivo FCFS (first-come first-served) o FIFO (first-in first-out), servizio in ordine inverso di arrivo LCFS (lastcome first-served) o LIFO (last-in first-out), servizio in ordine casuale SIRO (service in random order), servizio basato su classi di priorità

La notazione di Kendall

dimensione della popolazione sorgente

numero di *servitori*

distribuzione degli intertempi d'arrivo

A / B / c / K / m / Z

la disciplina di servizio (default: FCFS)

distribuzione dei tempi di servizio

capacità massima del sistema

In particolare ad A e B possono essere sostituite le seguenti lettere:

- **M** : distribuzione esponenziale (Markoviana)
- **D** : distribuzione costante (Degenere)
- **Ek** : distribuzione di Erlang di ordine k
- **G** : distribuzione generica
- **GI** : distribuzione generica di eventi indipendenti (per gli arrivi)

Esempio: **M/M/1** sta per **M/M/1/∞/∞/FCFS** coda con processo degli arrivi e dei servizi markoviani, un servitore, capacità del sistema infinita e arrivi provenienti da una popolazione infinita che vengono serviti su base FCFS.

la Teoria delle Code individua alcuni indici di prestazione direttamente legati ai costi che, quando valgono alcune ipotesi, sono facilmente calcolabili:

$\mathbf{L_s}$: numero medio di clienti nel sistema (sia in attesa di servizio e che riceventi servizio);

$\mathbf{L_q}$: numero medio di clienti in attesa di servizio;

$\mathbf{W_s}$: tempo di attesa medio dei clienti nel sistema (sia in attesa di servizio e che riceventi servizio);

$\mathbf{W_q}$: tempo d'attesa medio dei clienti prima di essere serviti;

$\mathbf{p_n}$: probabilità che vi siano a regime n clienti nel sistema;

$\boldsymbol{\rho}$: fattore di utilizzazione dei servitori (rapporto tra tempo impiegato in servizio e tempo disponibile complessivo).

CODA D / D / 1

Gli istanti d'arrivo dei clienti ed i tempi di espletamento dei servizi richiesti sono noti a priori.

Se la disciplina di servizio è FCFS, per ogni cliente, l'istante di uscita dal sistema è dato dalla somma del suo tempo di servizio e del massimo tra il suo istante d'arrivo e l'istante di uscita del cliente precedente.

a(i): istante d'arrivo del cliente i
s(i): durata del servizio del cliente i
x(i): istante d'uscita dal sistema del cliente i
w(i): tempo d'attesa del cliente i
n(t): numero di persone nel sistema all'istante t

Posto **x(0) = 0**, si ottiene

$$x(i) = s(i) + \max\{x(i-1), a(i)\} \qquad i = 1,2,3,\ldots$$
$$w(i) = x(i) - s(i) - a(i) \qquad i = 1,2,3,\ldots$$

Quindi, per calcolare il numero di clienti nel sistema all'istante t, basta contare il numero di valori di clienti i per cui $a(i) \leq t < x(i)$, dal momento che un cliente è nel sistema nell'istante in cui entra, non vi è più nell'istante in cui esce.
Il caso totalmente deterministico è però difficile che occorra nella realtà.

Nei casi pratici si possono trovare code con intertempi d'arrivo dei clienti e tempi di servizio soggetti a distribuzioni probabilistiche di quasi qualunque tipo.
Tra le tante, la distribuzione
esponenziale è forse quella che trova maggiore applicazione e che inoltre presenta migliore trattabilità dal punto di vista matematico.

X ha **distribuzione esponenziale** con parametro λ > 0 quando la sua densità p(x) è:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$E[x]=1/\lambda$ $\quad\quad$ $Var[x]=1/\lambda^2$

- la probabilità un evento occorra in un intervallo di tempo infinitesimo dx è proporzionale a dx, con λ come costante di proporzionalità $\quad P(x < X \leq x + dx) = \lambda dx$
- la probabilità di avere più di un evento in un intervallo di tempo infinitesimo dx è nulla;
- la probabilità che il prossimo evento ritardi oltre un dato limite non dipende da quanto tempo si è verificato l'evento precedente.

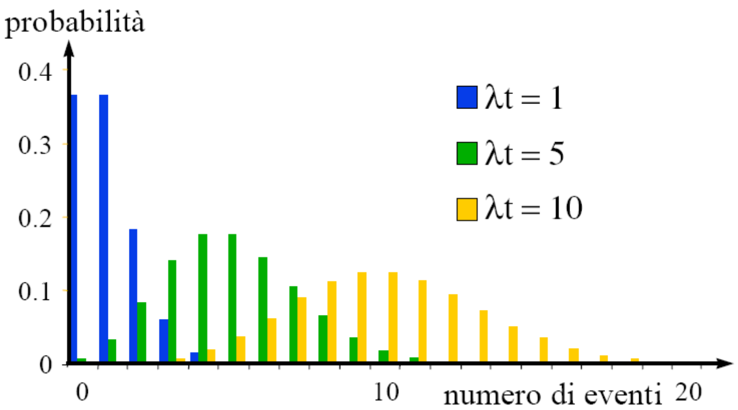
Il processo non deve avere quindi memoria (proprietà markoviana).

La mancanza di memoria della distribuzione esponenziale rende la stessa ragionevole per modellare gli inter-tempi d'arrivo che non siano correlati, cioè tali per cui l'arrivo di un cliente non favorisca o sfavorisca altri arrivi

Processo di Poisson

Quando gli intertempi sono esponenziali il numero di eventi N(t) che si verifica in un dato tempo t è un processo di Poisson:

$$P\{N(t) = n\} = [\,(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\,] / n!$$

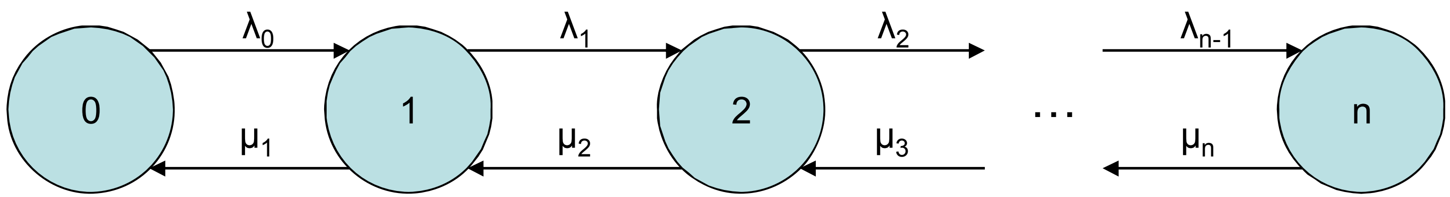


$E[x] = \lambda t$

Ove **λ** esprime il n_{medio} di eventi nell'unità di tempo ⇒ la $frequenza_{media}$.

Processo di nascite - morti

N(t) numero di elementi di una popolazione che può aumentare, per effetto di una nascita, o diminuire, per effetto di una morte, di un’unità alla volta



p_n(t) valore della probabilità che al tempo t il processo nascite-morti si trovi nello stato n

probabilità che al tempo t siano in vita n persone

sistema di equazioni differenziali

$$p_0(t + dt) = p_0(t)(1 - \lambda_0)\, dt + p_1(t)\, \mu_1\, dt$$

$$p_n(t + dt) = p_n(t)(1 - \lambda_n - \mu_n)\, dt + p_{n-1}(t)\, \lambda_{n-1}\, dt + p_{n+1}(t)\, \mu_{n-1}\, dt \quad n=1,2,....$$

$t \to \infty$

il tasso delle morti supera il tasso delle nascite ⇒ processo stazionario → le sue proprietà statistiche non variano più nel tempo

⇓

il sistema di equazioni differenziali diventa un sistema di equazioni lineari omogeneo

Soluzione:

$$p_n = C_n\, p_0 \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$C_n = (\lambda_{n-1}\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0) \,/\, (\mu_n\, \mu_{n-1} \ldots \mu_1)$$

Osservazione:

$$\Sigma_n\, p_n = 1$$

$$p_0 = 1 \,/\, (1 + \Sigma_n\, C_n)$$

⇒ Da questi risultati è possibile ricavare le distribuzioni di probabilità di tutte le code poissoniane (M/M/…)

CODA M / M / 1

Una coda M/M/1 è fisicamente composta da un buffer e da un solo servitore; in essa l'intertempo tra due arrivi successivi e il tempo di servizio sono due variabili aleatorie markoviane, cioè con distribuzione esponenziale. Il tasso medio di interarrivo e il tasso medio di servizio sono usualmente indicati con λ e μ

La coda M/M/1 può essere considerata un processo nascite - morti con:

$$\lambda_n = \lambda \qquad \mu_n = \mu$$

$$p_n = \rho^n p_0 \qquad n = 1,2,...$$

fattore di utilizzazione $\rho = (\lambda / \mu)$

esprime il rapporto tra il tempo medio di servizio e il tempo medio tra due arrivi.

$$p_0 = 1 / (1 + \Sigma_n C_n) = 1 / (1 + \Sigma_n \rho^n)$$

p_0 esiste se e solo se **ρ < 1**

condizione di **stabilità**

$$1 + \Sigma_n \rho^n = 1 + \rho/1 - \rho$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0 = 1 - \rho \\ p_n = \rho^n (1 - \rho) \end{array}}$$

$\rho = 1\text{-}p_0$

- tasso di occupazione del servitore
- frazione di tempo in cui il servitore lavora
- La probabilità che ci sia almeno un cliente nel sistema
- numero medio di ingressi durante un servizio.

Una volta note le probabilità p_n possono essere calcolati i valori delle altre grandezze d'interesse.

numero medio di clienti nel sistema

$$\boxed{L_S = E\{n\} = \sum_n n\, p_n = \rho \,/\, (1 - \rho)}$$

varianza

$$\sigma^2_{L_s} = E\left\{(n - L_s)^2\right\} = \rho / (1 - \rho)^2$$

numero medio di clienti in attesa

Lq = Ls – [n. medio di clienti correntemente serviti] =

$Ls - \rho = \rho^2 \,/\, (1 - \rho)$

formula di Little:

$$W_S = L_S / \lambda$$

Se una coda è stabile, qualunque essa sia, in media devono uscire dal sistema tanti clienti quanti entrano.

tempo media di attesa dei clienti nel sistema

$$W_S = 1 / (\mu - \lambda)$$

tempo medio d’attesa in coda

$$W_q = W_S - (1 / \mu) = \lambda / (\mu (\mu - \lambda))$$

Fattore di utilizzazione

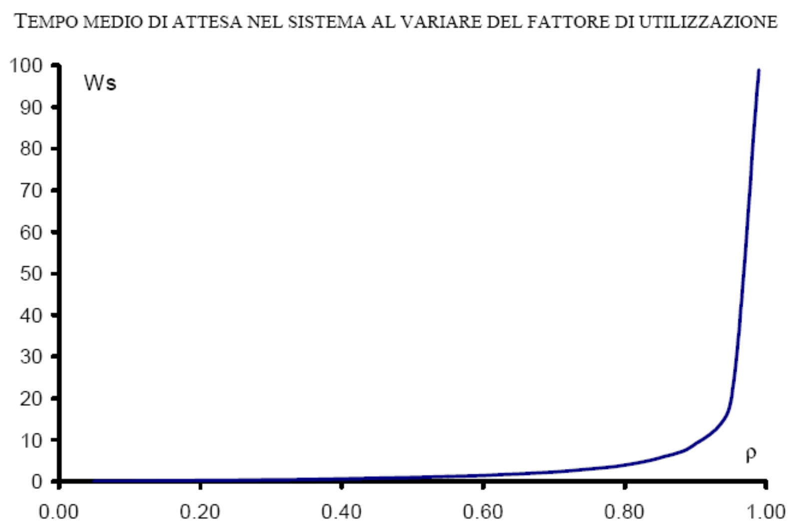
ρ aumenta

Cresce l'occupazione del servitore

Aumenta la permanenza media

Cresce numero medio dei clienti nel sistema

Cresce il numero medio e il tempo medio dei clienti in attesa



ρ aumenta

- maggiore arrivo di clienti → maggiore utilizzazione delle risorse disponibili
- utilizzo di servitori meno veloci → minore costo di acquisto delle risorse impiegate

CODE M / M / s

s servitori in parallelo ciascuno con tasso di servizio μ $\lambda_n = \lambda$

per le proprietà dell'esponenziale:
$$\mu_n = n\,\mu \quad \text{per} \quad 1 \le n \le s$$
$$\mu_n = s\,\mu \quad \text{per} \quad n > s$$

Il fattore di utilizzazione vale $\rho = \lambda / (s\mu)$:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(s\rho)^n}{n!} & 1 \le n < s \\ p_0 \dfrac{s^s \rho^n}{n!} & n \ge s \end{cases}$$

$$\boxed{p_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]}$$

$$\boxed{L_q = \frac{(s\rho)^{c+1}}{s^2 (s-1)!(1-\rho)^2} p_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} W_q &= L_q / \lambda \\ W_s &= W_q + 1/\mu \\ L_s &= L_q + \lambda/\mu. \end{aligned}}$$

Coda **M / M / ∞** in cui vi sono infiniti servitori

nei self-service: ogni cliente serve se stesso.

$$\boxed{\begin{aligned} L_s &= \lambda/\mu. \\ W_s &= 1/\mu. \\ W_q &= L_q = 0. \end{aligned}}$$

CODE M / M / 1 / K

La coda M/M/1/K ha capacità finita K $\longrightarrow$ nel sistema non possono essere presenti più di K clienti

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{per} \quad 0 \le n < K$$
$$\lambda_n = 0 \quad \text{per} \quad n \ge K$$
$$\mu_n = \mu \quad \text{per} \quad 1 \le n \le K$$
$$\mu_n = 0 \quad \text{per} \quad n > K.$$

La coda M/M/1/K è sempre stabile per definizione

$$\boxed{L_s = \rho / (1 - \rho) - (K + 1)\, \rho^{K+1} / (1 - \rho^{K+1})}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_q = L_s - (1 - p_0) \\ W_s = L_s / \lambda' \\ W_q = L_q / \lambda' \end{array}}$$

tasso d'ingresso effettivo: $\lambda' = \lambda\,(1 - p_K)$

CODE M / M / 1 / N / N

ha capacità finita N ma anche popolazione finita N

$$\lambda_n = (N - n)\,\lambda \qquad \text{per} \qquad 0 \le n \le N$$
$$\lambda_n = 0 \qquad \text{per} \qquad n \ge N$$
$$\mu_n = \mu$$

è sempre stabile

$$\boxed{L_s = N - (1 - p_0)\,\mu / \lambda}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} L_q = L_s - (1 - p_0) \\ W_s = L_s / \lambda' \\ W_q = L_q / \lambda' \end{array}}$$

tasso d'ingresso effettivo: $\lambda' = \lambda\,(N - L_s)$

$$\lambda' = \sum_{n=0}^{N} (N-n)\lambda_n p_n = \lambda N \sum_{n=0}^{N} p_n - \lambda \sum_{n=0}^{N} n p_n = \lambda (N - L_s)$$

CODE M / G / 1

ha arrivi poissoniani, ma tempi di servizio qualunque, purché indipendenti e omogenei (con la stessa distribuzione), con **media 1 / μ** e **varianza σ^2** note

condizione di stazionarietà $\rho = \lambda / \mu < 1$

formula di **Pollaczek-Khintchine**) $\boxed{L_q = (\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2) / (2(1-\rho))}$

varianza del tempo di servizio

$$\boxed{\begin{array}{c} L_s = L_q + \rho \\ W_q = L_q / \lambda \\ W_s = W_q + 1/\mu \end{array}}$$

L_q cresce con σ e quindi un servitore regolare ha prestazioni migliori

CODE M / D / 1

arrivi poissoniani e tempo di servizio costante
è un caso particolare di M/G/1 con σ=0

la formula di Pollaczek - Khintchine si riduce a:

$$\boxed{L_q = \rho^2 / (2(1-\rho))}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_s = L_q + \rho \\ W_q = L_q / \lambda \\ W_s = W_q + 1/\mu \end{array}}$$

La varianza del tempo di servizio è 0 per M/D/1 mentre è $1/\mu^2$ per M/M/1. → Il numero medio dei clienti in attesa di servizio è per una coda M/D/1 la metà che per M/M/1.

CODE M / E_k / 1

è utilizzata per modellare casi intermedi in cui, oltre che la media e la varianza, è nota anche la forma della distribuzione degli intertempi di servizio.

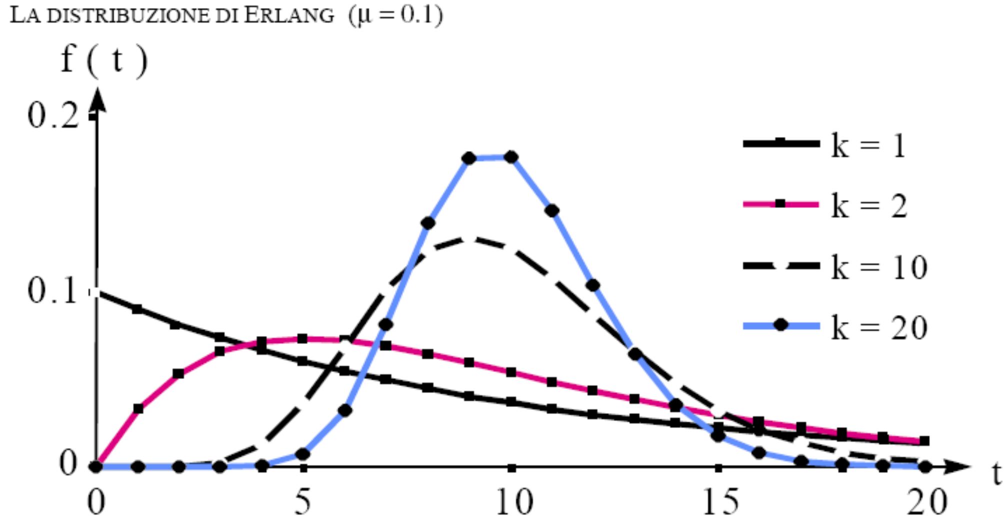
distribuzione di Erlang di ordine k $\quad f(t) = (k\mu)^k \, t^{k-1} \, e^{-k\mu t} \, / \, (k-1)! \quad \text{per} \quad t \geq 0$

dove k è un intero positivo ed è detto **fattore di forma**

La distribuzione di Erlang di ordine k ha **media 1 / μ** e **varianza 1 / kμ²**.
E_k è quindi una variabile aleatoria non negativa che dipende da due parametri: μ e k dove μ determina la media k determina la varianza.

La somma di k variabili aleatorie indipendenti esponenziali ciascuna con media 1 / kμ:
$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$
è una v.a. con distribuzione di Erlang di ordine k e parametri μ e k.

per k che tende all'infinito la distribuzione di Erlang tende alla a diventare la distribuzione normale



la distribuzione di Erlang può essere interpretata come la distribuzione del tempo di servizio di un sistema in cui vi siano k servitori esponenziali in serie, in cui però il primo servitore non può iniziare un nuovo servizio se l'ultimo non ha concluso il proprio

$$L_q = ((1+k)\lambda^2)/(\mu(\mu-\lambda))$$

$$L_s = L_q + \rho$$
$$W_q = L_q / \lambda$$
$$W_s = W_q + 1/\mu$$

CODE M / H_R / 1

è utilizzata quando le varianze dei tempi di servizio sono maggiori di 1/μ2

distribuzione iperesponenziale di ordine R $\quad f(t) = \Sigma^R \alpha_i \mu_i \exp(-\mu_i t) \quad \text{per} \quad t \geq 0$

può essere interpretata come la distribuzione del tempo di servizio di un sistema in cui vi siano R servitori esponenziali con prestazioni differenti

Il cliente sceglie con probabilità α_i servitore l'i-mo $\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_R = 1$

un cliente non può iniziare ad essere servito prima che il cliente che lo precedeva non sia uscito dal sistema → i servitori sono in parallelo ma non possono lavorare contemporaneamente varianza del tempo di servizio

$$\sigma^2 = 2\sum_{i=1}^{R} \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{R} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \right)^2$$

Pollaczek - Khintchine

$$\boxed{L_q = (\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2) / (2(1-\rho))}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_s = L_q + \rho \\ W_q = L_q / \lambda \\ W_s = W_q + 1/\mu \end{array}}$$

Analisi dei flussi produttivi

Qual è la capacità produttiva del mio sistema? (Macchina, linea, impianto, processo)

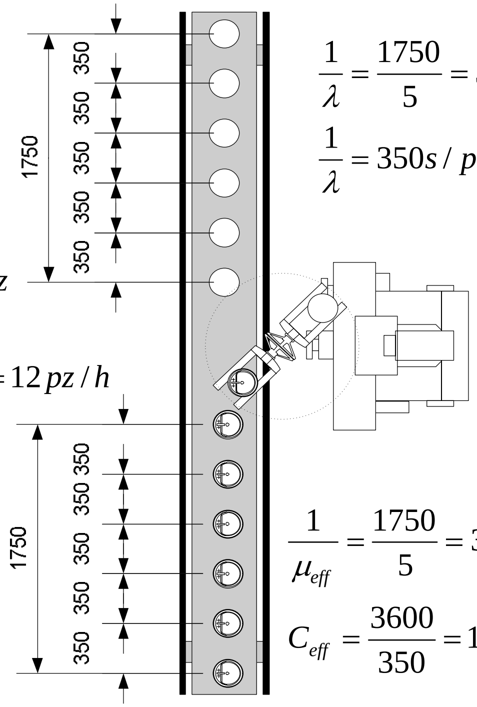
Sistema a cadenza costante in ingresso:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1750}{5} = 350$$

$$\frac{1}{\lambda} = 350 s / pezzo$$

$$\frac{1}{\mu_{pot}} = 300 s / pz$$

$$C_{T\max} = \frac{3600}{300} = 12 pz / h$$



$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{1750}{5} = 350 s / pz$$

$$C_{eff} = \frac{3600}{350} = 10.3 pz / h$$

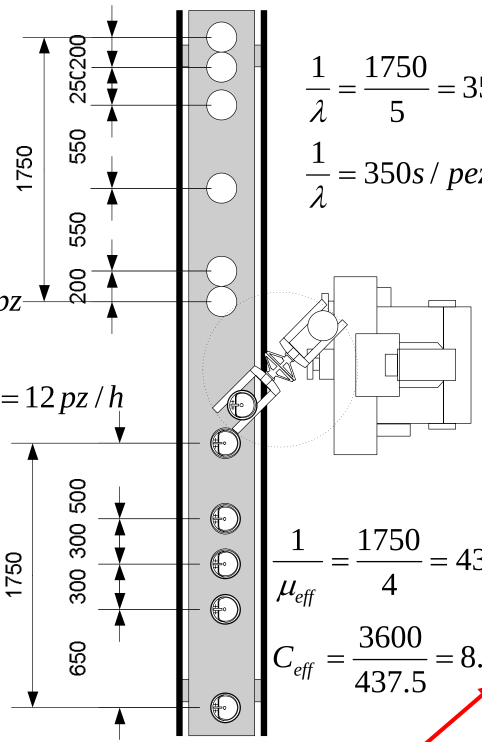
Sistema a cadenza stocastica in ingresso:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1750}{5} = 350$$

$$\frac{1}{\lambda} = 350 s / pezzo$$

$$\frac{1}{\mu_{pot}} = 300 s / pz$$

$$C_{T\max} = \frac{3600}{300} = 12 pz / h$$



$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{1750}{4} = 437.5 s / pz$$

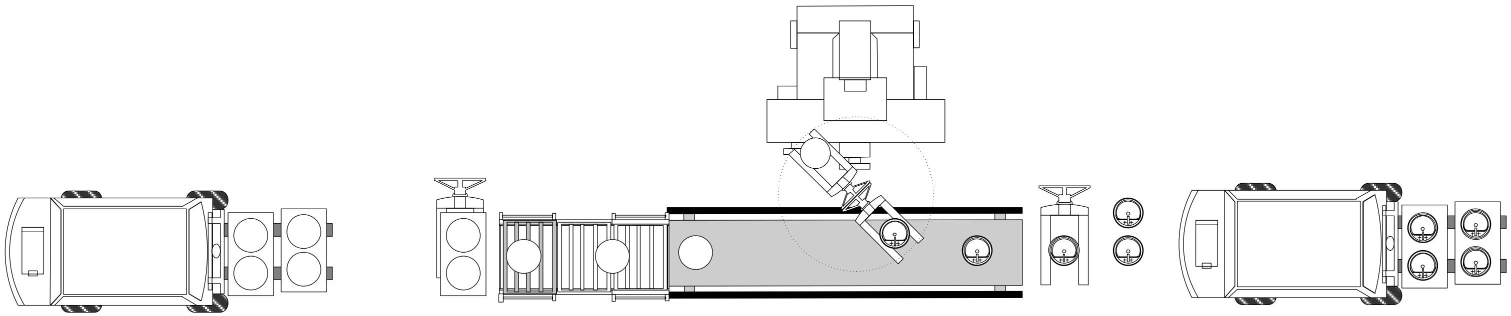
$$C_{eff} = \frac{3600}{437.5} = 8.3 pz / h$$

-19.4%

Analisi di un centro di lavorazione in cui i pezzi arrivano a lotti e partono a lotti

Spessissimo nell'industria manifatturiera, il problema del trasporto dei pezzi fa sì che non sia conveniente spostare un pezzo alla volta

Trasporto a lotti



b dimensione del lotto

$$\rho = \frac{\lambda}{\frac{\mu}{b}} = \frac{\lambda \cdot b}{\mu}$$

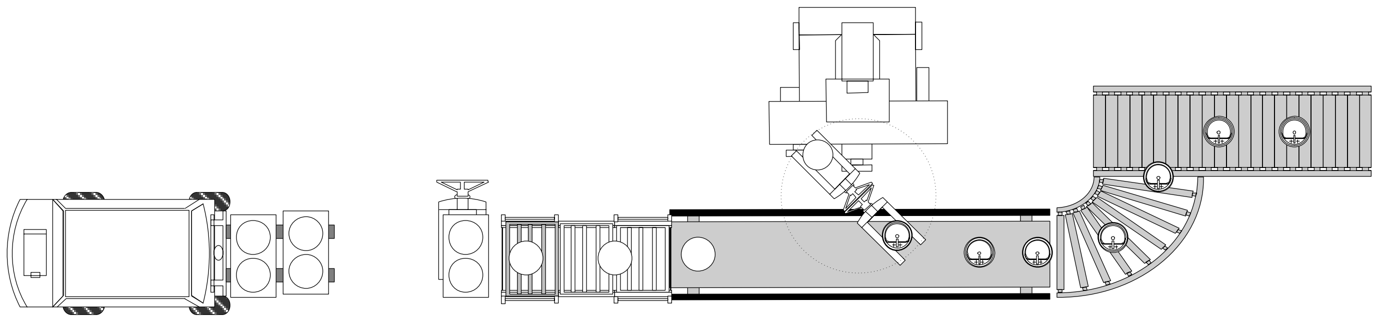
$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} b$$

Numero di pezzi nel sistema

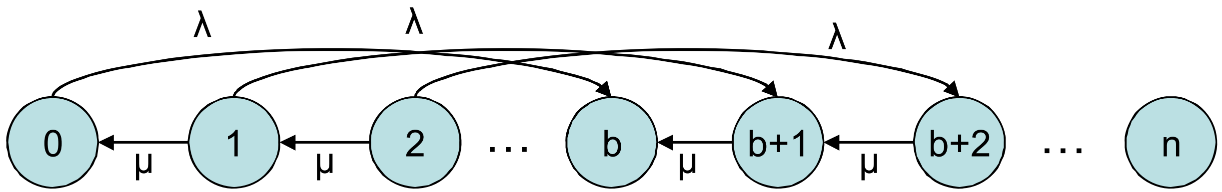
$$W_s = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-\rho} \cdot b$$

Tempo di attraversamento

Analisi di un centro di lavorazione in cui i pezzi arrivano a lotti e partono singolarmente



Grafo degli stati:



$$\mu \cdot p(2) = (\lambda + \mu) \cdot p(1)$$

Eq. Di bilancio per il nodo 1

$$\boxed{L_s = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1+b}{2}} \qquad \boxed{W_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1+b}{2}}$$

È evidente che è sempre più favorevole rispetto a prima per b > 1

Reti di Code

Nelle reti di Jackson ad ogni coda è associato un insieme di probabilità tempo invarianti, una per ogni altra coda del sistema e una per l'universo esterno. In base a tali probabilità ogni cliente, una volta terminato il servizio in una coda, è indirizzato o fuori dal sistema o verso un'altra coda.

la generica coda i-ma osserva un processo d'arrivo di clienti poissoniano di parametro

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_j p_{ji} \lambda_j$$

tasso di arrivi alla coda dei clienti che provengono dall'esterno del sistema

probabilità che un cliente in uscita dalla coda j-ma sia indirizzato verso la coda i-ma

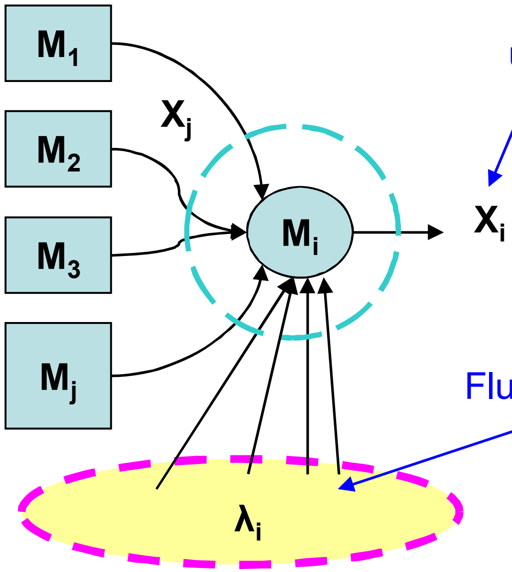
tasso complessivo di arrivo dei clienti alla coda j-ma

Conservazione dei flussi

uscita ingresso

$$X_i = I_i$$

In una rete di code dal comportamento stabile, i flussi si conservano sia considerando l'intero sistema che ogni sotto sistema



uscita

Probabilità di instradamento

$$I_i = \lambda_i^e + \sum_{j=1}^{M} p_{ij} X_j = X_i$$

Flusso entrante dall'esterno

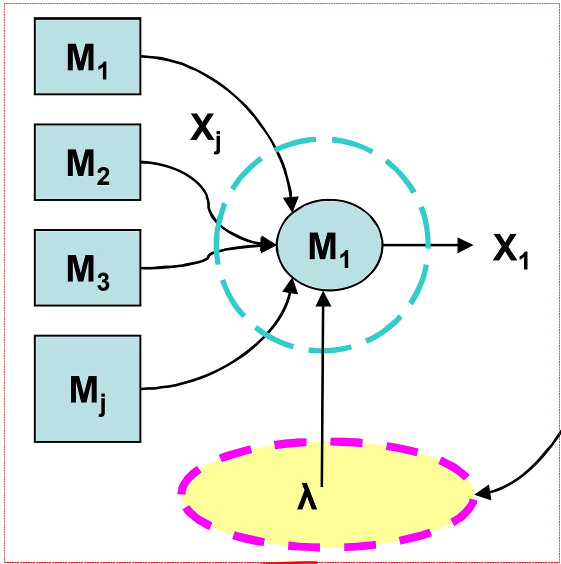
EQUAZIONI DI FLUSSO

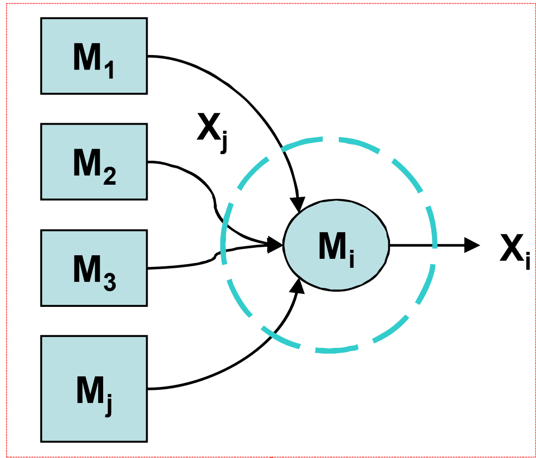
Verificando che ogni pezzo deve andare da qualche parte:

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} + p_{uscita,j} = 1$$

Caso interessante e frequente: $\exists$ un solo ingresso dall'esterno

ES: Tutta la merce che entra dall'esterno deve passare per il montaggio su supporti





Sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \boxed{X_1 = \lambda + \sum_{j=1}^{M} p_{1j} X_j \quad {}_i} \\ \boxed{X_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ij} X_j \quad {}_i \quad i \neq 1} \end{cases}$$

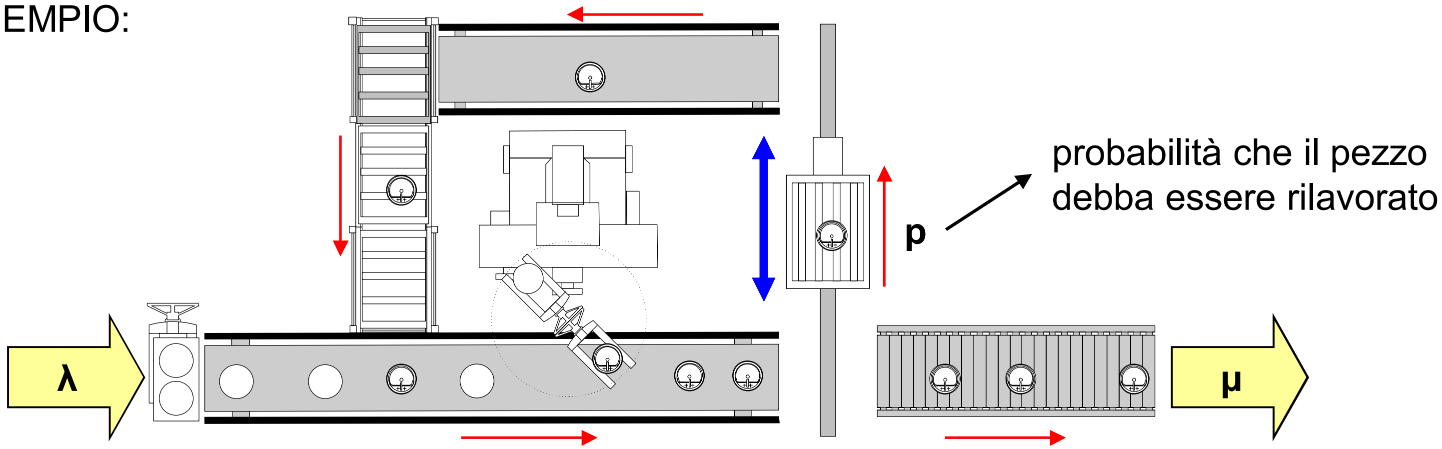
N° di volte che un pezzo passa sotto la macchina i

Dato λ e le probabilità di instradamento ho una soluzione unica se esprimo: $\boxed{X_i = \lambda \cdot V_i}$

$$\begin{cases} \boxed{V_1 = 1 + \sum_{j=1}^{M} p_{1j} V_j \quad i} \\ \boxed{V_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ij} V_j \quad i \neq 1} \end{cases}$$

Sistema di equazioni di bilanciamento dei flussi personalizzate per un solo ingresso nel sistema

ESEMPIO:

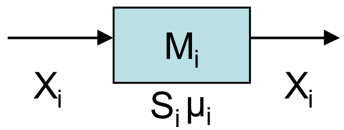


$$V_1 = 1 + pV_1 \longrightarrow V_1 = \frac{1}{1-p}$$

CAPACITÀ DEL SISTEMA

Posso definire l'utilizzo della risorsa i-esima

$$\boxed{X_i = \lambda \cdot V_i}$$



$$\boxed{\rho_i = \frac{X_i}{S_i \cdot \mu_i} = \frac{\lambda \cdot V_i}{S_i \cdot \mu_i}}$$

Numero di servitori

Nessuna macchina può superare la capacità massima teorica $\boxed{\rho_i < 1}$

$$\boxed{\frac{\lambda \cdot V_i}{S_i \cdot \mu_i} < 1}$$

È un sistema di disequazioni

Il massimo λ possibile per il mio centro di lavoro è:

$$\boxed{\overline{\lambda} = \min_i \left(\frac{S_i \cdot \mu_i}{V_i} \right)}$$

È la **CAPACITÀ MASSIMA**

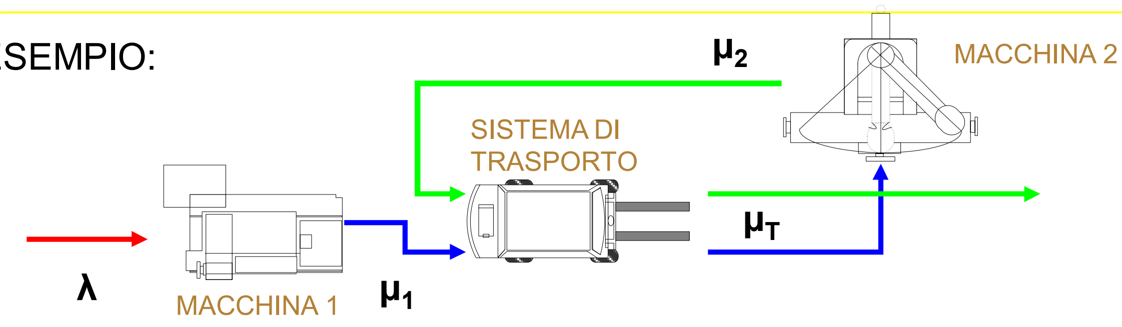
L'elemento connesso con questo numero è il *collo di bottiglia*

DIMENSIONAMENTO DEL SISTEMA PRODUTTIVO

Supponiamo ora di voler produrre con una capacità di: $X^* < \bar{\lambda}$

Allora: $X^* < \min_i \left(\frac{S_i \cdot \mu_i}{V_i} \right)$ ⇒ $\boxed{\forall i \quad S_i \cdot \mu_i \geq X^* \cdot V_i}$ Condizioni affinché io possa produrre con quella capacità

ESEMPIO:



Dimensionare il numero di carrelli noti:

$X^* = 0.6$ pz/min
$\mu_1 = \mu_2 = 1$ pz/min
$\mu_T = 1/5$ pz/min

$V_1 = 1$
$V_2 = 1$
$V_T = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

M1: $1 \cdot 1 \geq 0.6 \cdot 1$
M2: $1 \cdot 1 \geq 0.6 \cdot 1$
T: $S \cdot 1/5 \geq 0.6 \cdot 2$ ⟶ $S \geq 0.6 \cdot 2 \cdot 5 = 6$ carrelli

MASSIMIZZAZIONE DELLA CAPACITÀ PRODUTTIVA

$$\bar{\lambda} = \min_i \left(\frac{S_i \cdot \mu_i}{V_i} \right) \equiv \frac{1}{\max_i \left(\frac{V_i}{S_i \cdot \mu_i} \right)}$$

Il mio scopo è quello di far diventare minimo il denominatore

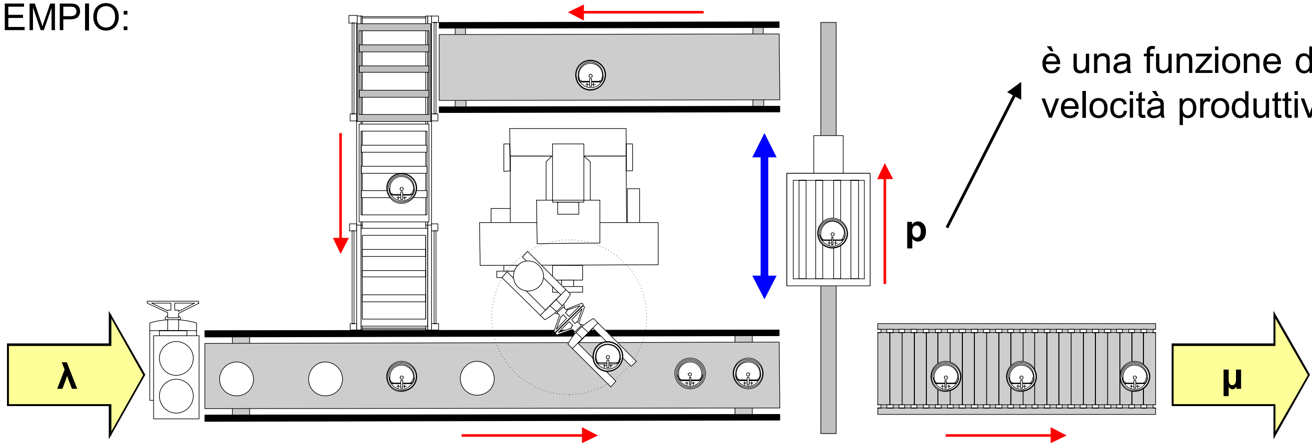
$$Z = \min \max_i \left(\frac{V_i}{S_i \cdot \mu_i} \right)$$

Questo valore è quello che mi massimizza la produttività in base alle scelte impiantistiche e di linea quali i passaggi dei pezzi sulle macchine, il numero di servitori, e la capacità produttiva massima dei centri

La **CAPACITÀ MASSIMA** sarà allora:

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\min \max_i \left(\frac{V_i}{S_i \cdot \mu_i} \right)}}$$

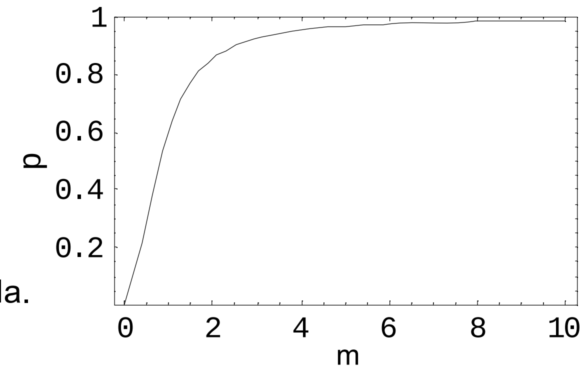
ESEMPIO:



è una funzione della velocità produttiva μ:

Caso più reale in cui la velocità impostata sulla macchina incide sulla quantità di pezzi da rilavorare

$$p = 1 + \frac{12}{-20\mu^2 + \mu^3 - 12}$$

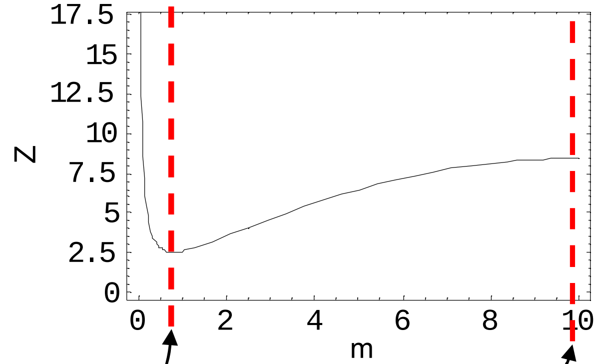


Se la velocità impostata è molto bassa la difettosità è quasi nulla.
Se aumentiamo la velocità la difettosità aumenta fino all'unità.

$$V = \frac{1}{1-p} = 1 - \frac{1}{12}(-20+\mu)\,\mu^2$$

$$Z = \frac{1}{\mu} + \frac{5\,\mu}{3} - \frac{\mu^2}{12}$$

$$Z = \min \max_{i=1}\left(\frac{V_i}{S_i \cdot \mu_i}\right) = \min\left(\frac{V}{1 \cdot \mu}\right)$$



$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = 0 \rightarrow \partial_\mu Z = \frac{5}{3} - \frac{1}{\mu^2} - \frac{\mu}{6} = 0$$

$\mu \to -0.75$

$\mu \to 0.80792$

$\mu \to 9.94$

Velocità produttiva della macchina cui corrisponde la massima produttività

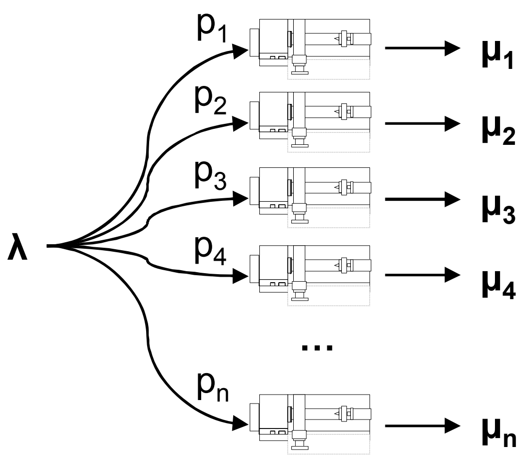
$$\mu_{minimo} = 0.80792\ \mathrm{pz/min}$$

$$T = N\left[\frac{1}{\mu_{minimo}}\right] = 1.23775\ \mathrm{min/pz}$$

Capacità produttiva massima

$$\lambda_{massimo} = N\left[\frac{1}{Z}\ /.\ \mu \to \mu_{minimo}\right] = 0.395275\ \mathrm{pz/min}$$

Caso di macchine in parallelo

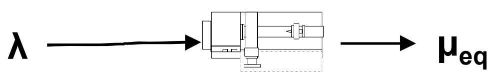


Si dimostra che la probabilità di instradamento ottima per ogni macchina è:

$$p_i^{ottima} = \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

Il numero di pezzi in ingresso ad ogni macchina sarà proporzionale alla corrispondente probabilità di instradamento:

$$(n^\circ\, pezzi)_i \propto p_i^{ottima}$$



In questo caso allora il sistema è equivalente ad una sola macchina con:

$$\mu_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$